TECUM 数理教育セミナー

セミナー講演資料

研究機関誌『数理教育のロゴスとプラクシス 2023 年 2 月号』

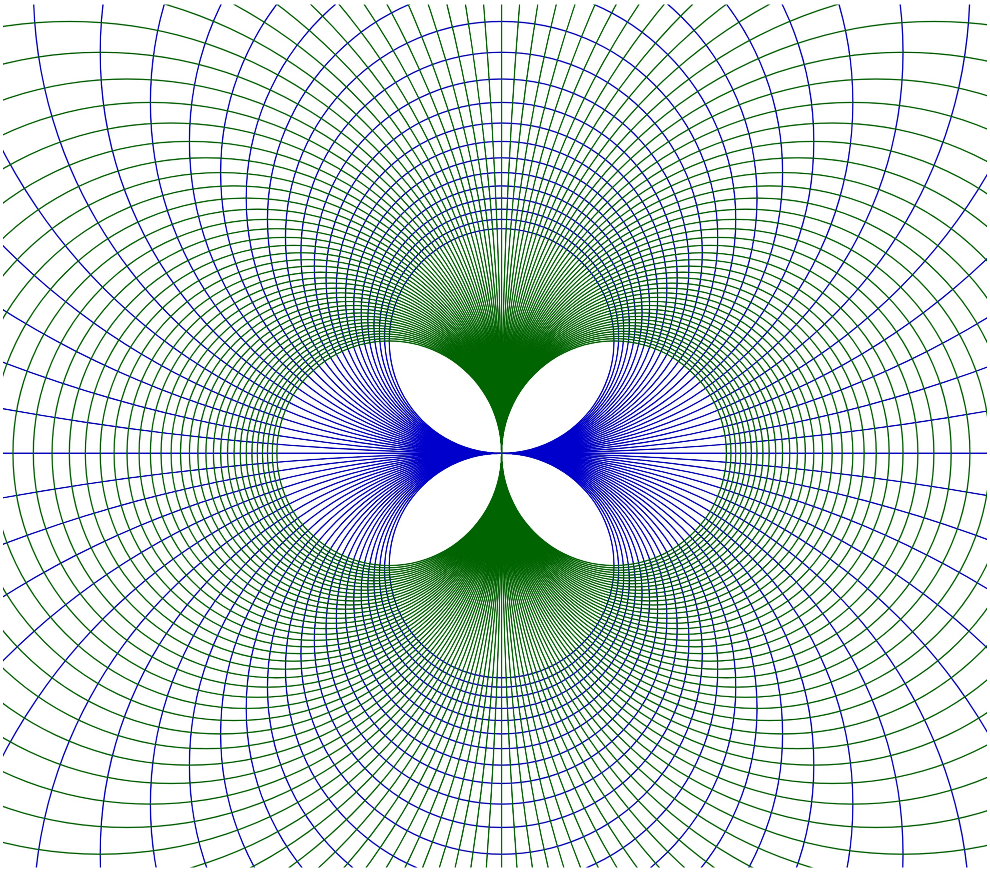

Image of the horizontal and vertical grid lines
under Möbius transformation $w = \frac{1}{z}$.

TECUM 機関誌委員会編

2023 年 2 月 11 日

マスクとサングラス

2023 年 2 月 11 日
平尾 淳一

新型コロナウイルスの国内での感染が確認されて丸 3 年が経過し，政府は屋外でのマスク着用を原則不要とする案を検討しているようですが，日本人を含む東アジアの人々は，あまり強い拒否反応を示すことなく比較的おおらかにマスク着用を受け入れているようにみえます．これに対して，欧米の人々は強い拒否反応を示しているように感じます．彼らにとって口を隠すと言うことは人権に関わる大問題といったところでしょうか．実際，欧米の人たちにとって口元の表情は意思伝達の重要なツールになっているという解説もあります．これに対して「目は口ほどに物を言う」という言葉があるように，日本人にとってはむしろ目を覆い隠すサングラスの方に抵抗を感じるところがあります．青い瞳を保護するために子供にも積極的にサングラスをかけさせる欧米人は，目より口で勝負する文化を持っているということでしょうか．

ところで，数学的な表現方法は物理学をはじめとする理工学分野に共通する強力なコミュニケーションツールとなっていますが，この研究会でもしばしば見られるように，数学と物理学の間においてもひとつの数式の背景にある「想い」のようなものに違いが感じられることがあります．たとえば，微分や積分は実数の上で定義されますが，物理では

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

における極限をあまり意識せずに計算が進められることがしばしばです．他方，物理ではこれら x や y がどんな単位をもっているか，といったことに大きな関心があります．

さて，今回のテーマは「べき関数」

$$y = ax^n$$

です．ちなみに，物理では定数 $a\,(\neq 0)$ は x，y の単位を適当にとることによって 1 とすることもできます．べき関数の中で特に基本的なものは $n = 1$ の場合でしょう．物理では分析対象となる 2 つの量の関係をとりあえず

$$y = ax$$

と定式化してみることが定石です．たとえば，熱膨張によって物体の大きさ y は温度 x に対して直線的に変化すると考えます．一般的には定数項を含む 1 次関数となりますが，温度の原点を絶対零度とすれば上式のようになります．この例に限らず x，y いずれかの原点を適当に移動すれば，定数項を 0 とすることができます．こうしたことを考慮すると，物理では，ある状態 (x, y) からの変位 $(\Delta x, \Delta y)$ を想定していて

$$\Delta y = a\Delta x \quad \text{すなわち} \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = a$$

と考えていることが多いのかも知れません．実験による測定値の範囲が限られているとき比 $\Delta y/\Delta x$ が一定となるととらえることにはある程度の合理性がありますが，この比が変化する可能性もあります．その場合も 1 次関数から出発して，この比が $a_1 + a_2 x$ に等しいとすれば

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = a_0 + a_1 x \quad \text{すなわち} \quad y = a_1 x + a_2 x^2$$

となり，2 次関数が得られます．ここで x を時刻，y を位置とすれば，等加速度運動を記述する式になります．べき関数の多項式は数学においても頻繁に登場しますが，有限の精度をもつ実測値を扱う物理において，べき級数展開は近似値を得るための有力な武器にもなります．

もうひとつ，べき関数の応用として役立つのが次元解析です．物理では諸量の関係が積または比の形で登場します．異なる量の和や差は意味を持ちません．たとえば，振り子の周期 τ は経験と「物理的考察」によって重力（の加速度）g と振子の長さ l だけで決められると考えられます．そこで適当な数 a，b を用いて

$$\tau = g^a l^b$$

と表すことにします．時間，長さの次元をそれぞれ $[T]$，$[L]$ とすると，τ，g，l の次元はそれぞれ $[LT^{-2}]$，$[L]$ であることから

$$[T] = [LT^{-2}]^a \cdot [L]^b$$

が成立します．そこで，$[T]$，$[L]$ それぞれの次数を比較すれば $a = -1/2$，$b = 1/2$ となり，元の式に戻って

$$\tau = c\sqrt{\frac{l}{g}}$$

であることがわかります．ただし，無次元の定数 c は次元解析からはわかりません．

最後に原子核の液滴モデルを紹介しておきましょう．これによって原子核の内部エネルギーを見積もることができます．ご存知の通り，原子核は陽子と中性子から成り立っています．これらを総称して核子と呼びます．1 個の原子核に含まれる陽子の個数を Z，中性子の個数を N として，核子数を $A = N + Z$ とするとき原子核の結合エネルギー E_{B} は

$$E_{\mathrm{B}} = a_{\mathrm{v}}A - a_{\mathrm{s}}A^{2/3} - a_{\mathrm{c}}Z(Z-1)A^{-1/3}$$

と表すことができます．ベーテ-ヴァイツゼッカーの公式によるとこの後にまだ項が続くのですが，ここでは省略します．右辺の各項はそれぞれ体積項，表面項，クーロン項とよばれます．液滴モデルでは原子核を一定密度の流体と考え，原子核の体積が核子数 A に比例するとします．第 1 項の体積力 $a_{\mathrm{v}}A$ は核子間に働く強い力によるものです．この力の及ぶ範囲は短いため隣接する核子との間のみに作用します．したがって対応する結合エネルギーは原子核全体で核子の総数 A に比例すると考えることができます．しかし，表面にある核子は内部の核子に比べて隣接する核子が少なく，その分だけ核が分裂しやすくなると考えることができます．すなわちそれだけ結合エネルギーが小さくなる方向に作用します．それが第 2 項 $-a_{\mathrm{s}}A^{2/3}$ です．その名の通り表面積 $A^{2/3}$ に比例する項です．最後の項は核子のうち陽子間に働く静電気的な斥力（クーロン斥力）によって結合エネルギーが小さくなる効果を表しています．核子間の平均的な距離は $A^{1/3}$ に比例することからクーロンポテンシャルは $-a_{\mathrm{c}}Z(Z-1)A^{-1/3}$ と表されることに注意しましょう．

原子核の安定性は核子 1 個あたりの結合エネルギー

$$\varepsilon_{\mathrm{B}} = \frac{E_{\mathrm{B}}}{A} = a_{\mathrm{v}} - a_{\mathrm{s}}A^{-1/3} - a_{\mathrm{c}}Z(Z-1)A^{-4/3}$$

で評価されます．つまり原子核の安定性は核子間に働く強い引力（核力）と陽子間に働く斥力のバランスによって支配されています．また，陽子数と中性子数は互いに等しくなる傾向があります（公式で省略された項のひとつ）．したがって $Z - 1 \fallingdotseq Z \fallingdotseq A/2$ とすると

$$\varepsilon_{\mathrm{B}} \fallingdotseq a_{\mathrm{v}} - a_{\mathrm{s}}A^{-1/3} - \frac{a_{\mathrm{c}}}{4}A^{2/3}$$

となります．このように非整数の指数が現れることも物理では珍しくありません．この最後の式から結合エネルギー ε_{B} を最大にする核子数 $A = 2a_{\mathrm{s}}/a_{\mathrm{c}}$ が求められます．元素で言えばこれは鉄 (Fe) に相当します．

このように細かいことに深入りせずに宇宙を理解できるのが物理の醍醐味といえるでしょう．

目 次