

TECUM Letter

2018年10月号 創刊第5号（通巻6号）

目次

0 はじめに — 2018年度 $\frac{10}{12}$ 分の最後を飾る?! TECUM の活動について	1
1 賛助会員のページ (1)	2
2 賛助会員のページ (2)	4
3 連載論考「数学の世界」と「物理学の世界」 No.6	7
4 連載: スクリプトの開く世界 No.6	10

0 はじめに — 2018年度 $\frac{10}{12}$ 分の最後を飾る?! TECUM の活動について

いよいよ TECUM が法的に認証された法人としての活動に入ります。本号の発行は、認証手続きが順調なら、この TECUM Letter 10月号から、NPO 法人からの情報として発信できるのではないかという期待とそれに向けての所轄庁とのやりとりの不手際による遅延から不本意かつ不要に遅れてしまったことをお詫び申し上げます。しかし、今号こそ「みなし法人」（法的には「任意団体」）としての TECUM からの『TECUM Letter』の最終号となると思います。次号では、「珍道中を通して見た、特定非営利活動法人申請の勧め」のような記事を御報告したいと思っています。

さて、TECUM Letter 8月号で予告したように、8月の定例研究会前日に、主として若手数学教員を対象とした「TECUM 数学教育公開教育ワークショップ (TECUM Open Workshop on Mathematics Education '2018)」を開催しました。「教科書を素早く終えて入試問題演習に時間をかける」という、最近の中学、高等学校で一般化した数学教育の内容とスタイルのもつ問題点を一緒に考えて、少しでも、より良い教育（学習者にとってより深い数学的な理解への接近を通じて、より楽しく、より効率的な数学教育の具体的実装）を実現するための知恵を編み出していこうという作業的な勉強会の趣旨でしたが、このような研究会の組織に対して、私達が不慣れであったこともあり、それなりの予算を組んで用意した教材は充実しすぎていて限られた時間では使い切ることができませんでした。広報活動がほとんどなされていなかったこともあり、会場から溢れる心配は不要であったことなど、反省点も数多くありますが、「中央大学付属」、「茗溪学園」、「広尾学園」などから複数の参加者を得て TECUM 会員の輪が広がる可能性を実現したこと、また、終了後の参加者アンケートからは充実した研究会になったことが分かりました。

翌日は、いつもの定例研究会となりました。夏期休暇中にも関わらず、御都合をつけて多くの方が参加してくださいました。一般会員の他に、落合卓四郎先生をはじめ2日間連続で参加して下さった賛助会員、非会員の方もいらっしゃいました。次回の研究会は、11月11日、場所と時間は前回と同様です。

TECUM は NPO 法人になっても、従来と同様の活動を引き続き行って参りますが、新法人は所轄庁から見ると旧組織とはまったく別の組織ですので、会員の皆様には、大変申し訳ありませんが、「NPO 法人 TECUM」への入会手続きをあらためてもう一度お願いします。また、繰り返し申し上げて来たことですが、「特別賛助会

員」という会員資格はなくなり、「一般会員」と「賛助会員」の2種類になります。そして、会員には、「TECUM 設立趣旨書」、「TECUM 定款」の趣旨に賛同していただく以外には、一切の入会審査がなくなります。

NPO 法人 TECUM が成立すると、金融機関の口座も法人名義の新口座に変更になります。したがって、いずれにしても、新法人が成立してからの話ですので、「入会申し込み」や「会費の納入」を急いでいただく必要はありません！ただし、法律上の縛りから、新法人の 2018 年度は法人成立の日から 2019 年 3 月 31 日まで、となります。御理解を賜りたいと思います。

法人化すると、文書による証明が必須化しますので、世間で通用する領収証も「NPO 法人 TECUM」名義で発行するように致します。ただし、Amazon 的な電子的な方法となるかも知れません。

2018 年 8 月のワークショップの教材 (A4 版 100 ページ弱) は残部数がありますので、希望者には実費 + 送料という趣旨で 2,500 円で頒布致します。2018 年 11 月 11 日以降の研究会に御参加いただく会員は、その場での受け取りを事前にお申し込みいただければ会場に用意し、2,000 円で頒布します。

また、少し先の話になりますが、「TECUM 数学教育叢書」の発行を、2019 年度中には、という計画で目指しています。出版の暁には、また会員の皆様にご協力を賜ることができれば幸いに存じます。出来上がりが見えた段階で、事前申込の方法、期限など、また詳しくご案内します。「TECUM 総合的数理科学教育教育叢書」(仮題)の発行も試行中です。

前回、今回と、『TECUM Letter』は多くの事情、言い訳から発行が遅れ、連載企画のうち、幾つかが欠けてしまいましたが、幸い、賛助会員のページには原稿を 2 つもいただくことができました。以前提案したような、「我が家の教育相談」とか「学校でこんなこと習ったといっていますが大丈夫でしょうか?」のような、会員からのお問い合わせのページも充実させたいと思っています。そういう問題、素材の提供にご協力下さい。

なお、今回から、左右の余白を少しだけ多めにとって、特に印刷しない方に読みやすくしました。

長岡 亮介

1 賛助会員のページ (1)

本号にご登壇いただく高田氏は、津田塾大学の卒業生ですが、私の数多くの「教え子」の一人ではありません。後の記事にあるように、数学教員としての経験ももたない方でありながら、数学への深い憧憬をお持ちで、時間が自由になったのを機に、津田塾大学の数学科卒業生が、自主的に開催、運営している数学勉強会 (実に、スゴイことです!) に新しいメンバーとして加わり、その御縁と、駒井史家氏の紹介で、私が同窓会誌に書いた TECUM の短い紹介で TECUM に加わってくださった方です。同窓会誌に駒井氏と協力して書いた記事は以下のような簡単なものでした。

数学教員をサポートする新教育プロジェクト TECUM のご案内

私が津田塾大学で教えていた 40 年前は、今にして思えば本当に「古き佳き時代」でありました。こういえば大方の方は同意して下さるでしょう。当時と比べ現代社会は、何者かに急き立てられているかのようです。そのような社会の中で次世代を育てる教員も、又そのような教員に子供達までもが急き立てられています。しかし、教育で急ぐことは、未来にある本当の教育の成果を犠牲にすることになり兼ねません。

教員は、様々な可能性に満ちた一人一人の子どもの中に眠る才能の開花を辛抱強く待つ人であってほしいと思いませんか。そういうゆとりある教員は、深い教育的慈愛と、学問への憧憬をもち続ける謙虚な知性から生まれると思います。しかるに、現代の社会と学校は、教員がゆとりをもって生徒と接することを禁止しているといつて良いような状況です。

TECUM という運動体は、夢を抱いて教育界に飛び込んだものの、「現実の壁」にぶつかって苦闘している数学教員に自己研鑽と情報交換の場を提供し、より良い教員になって頑張ろうとする、特に若手数学教員の輪を形成しようとするものです。2 年後の「認定 NPO 法人」格取得を目指して 2018 年 1 月から助走を開始します。会の趣旨に賛同する賛助会員としてと年間御入会いただけるとこの法人格をとる上で大変有効です。ご協力、ご支援賜われれば幸いです。詳しくは <http://www.tecum.world/> を御覧下さい。

このようなほんの些細な呼びかけが、津田塾大学では個人的な御縁のなかつた高田順江^{まさえ}氏が、始まったばかりの TECUM の賛助会員になってくださるきっかけとなったのです。

平凡ですが、「縁とは不思議なものである」という古人の教えを思うとともに、数学という深遠な世界との接触体験が、新しい団結の芽を育ててくれた好運を、数理世界に対する感謝とその教育に携わる矜持の気持ちをあらためて感じます。

今回は詳しく書きませんが、この後の本文にあるように、「エンタープライズ寄港反対」や「ベトナム反戦」をからはじまる、1968 年 ~ 1969 年という輝かしい激動の時代を走った体験も高田氏と私は少し共有して

います。以下のご論考の中に出て来る IBM の「System/360」や「PL/1」という固有名詞が懐かしい方も会員の中にはいらっしゃるのではないのでしょうか。

ところで、『レ・ミゼラブル』というミュージカルの DVD を、TECUM Letter 創刊第 1 号（2018 年 2 月号）に原稿をお寄せくださった精神科医の波多野良二氏からお贈りいただいたのですが、ヒュー・ジャックマンのジャンバルジャンも、アン・ハサウェイのフォンテーヌも素晴らしいのですが、驚いたのは、共和派の活動家を演ずるエディ・レッドメイン演ずるマリウスのヘアスタイルが Evaliste Galois の残されている肖像画のそれとそっくりで、演出家が数学や数学史に造詣が深いことを感じさせてくれました。

長岡

数学は哲学だ、と言いながら歩んだ人生

高田 順江

6 年前ミニチュアシュナウザーの子犬を我が家に迎え入れました。ただ数学者だといううる覚えで「ガロア」と名付けました。今更ながら「ガロア」について何も知らないことに気づいて、数学を再び学びたいと思うようになりました。津田塾大学同窓会で OG が運営している黒田俊郎先生の「数学を楽しむ会」に今年 3 月より入りました。メンバーは 10 人ほどでやはり数学教師が多いようです。50 年ぶりに触れる数学に、「人生の忘れ物」を見つけたような気がして、毎回ワクワクしています。

数学を好きになったのは、小学生の頃父から鶴亀算の問題を出されてスラスラ解いて面白かったからです。文章題を数式で表現することに夢中になりました。都立北園高校時代には数学と化学が好きでした。67 年、お茶の水女子大学の化学科と津田塾大学の数学科を受験し、後者のみ合格しました。母は、官立の大学より津田梅子という志を持った女性の創設した津田塾大学入学をととても喜んでくれました。当時の私には何の感動もありませんでしたが、今とってみれば母の憧れの大学だったと気づきます。

大学の一般教養科目の授業で「勉強」という目標を失い、合コンのハンカチ落としとして幼稚化を嫌悪し、フレッシュマンブルーになりました。私は教養という文化にも縁がなく、命題を与えられて「勉強 = 記憶」する受験体質に、はまっていたのだと思います。9 月佐世保エンタープライズ寄港阻止闘争が新聞で大きく報道されると、同世代の真摯な行動に衝撃を受けました。大学でもクラスで討論するようになり、新左翼のセクトでデモに参加するようになりました。ベトナム戦争反対がいつしか日帝粉砕に変わり、将来像が描けなくなり、4 年生になった 70 年には政治活動に入れない自分に挫折してキャンパスに戻りました。代数学 12、幾何学 22、解析学 30、統計学 2、測量 2、計 68 単位を修得しているのですが、専攻ゼミも指導教官も覚えていません。初めてデモに行った友と二人だけのゼミでした。

71 年、就職は学生課にある求人企業から選びましたが、学友が受ける会社には気後れして応募できずにいました。他の人が就職先を決定していった後に、遅れて求人情報がきたのが東京瓦斯でした。東京瓦斯では、システム開発要員として学卒女子を初めて採用するというので、お茶の水女子大、東京女子大、そして津田塾大の 3 校が指名されました。86 年の雇用機会均等法に基づく総合職ではないのですが、学卒男子と同等の処遇でした。大学からは応募者は私一人でした。入社試験も私一人で、数学の試験が解けなくて考え方のプロセスを記述していると、監督官が回答用紙を覗き込んでそこまでできればいいよと言うので、そのまま提出しました。その数学問題ができなかったことは業務にはハンディにならなくて、大学数学と縁遠くなりました。

配属されたのはシステムセンターで NS（天然ガス熱量変更システム）チームです。IBM360 が設置されていた大きくて寒いコンピュートルームに通って、与えられた業務のプログラム開発に取り組んでいました。プログラム本番テストでは男子と一緒に徹夜もしました。言語は PL 1、プログラミングは高校程度の数式を使うだけで、大学の数学を使わず拍子抜けしました。ただ入力データと出力帳表を与えられてフローチャートに落とすプログラムは面白くて好きになりました。入力データの全てを掴んでケースをもれなく網羅するという作業には、数学的センスが役立つかもしれません。膨大なテストデータを作成するのも苦にならず、いつもケースの漏れを頭に中でチェックしていました。この思考方法のことを「数学は哲学だ」などとうそぶいて、難しい数式を使わない言い訳にしていました。まもなくプログラム作成は外注になったので、システムエンジニアとして仕様書を書き、納品されたプログラムの検収をしていました。6 年勤務して退職しました。

87 年再就職したのは財団法人横浜市女性協会。事業企画、調査研究、情報システム、会館管理と様々な分野を経験しました。当時ビデオテックスという最先端のコンピュータネットワークシステムを制作して横浜市の各地

域に情報端末を置き、女性のための情報を提供していました。その後インターネット活用や職員一人1台PC割り当て等、事業と組織の高度情報化を積極的に推進してきました。職員は「女性問題」に関わりのある方が多く、数学科出身は私一人、「女性の権利」をここで初めて学びました。

定年後は国際医療福祉大学大学院に入り、医療福祉ジャーナリズム分野で当事者研究に触れました。指導教官は大熊由紀子教授（ゆきさん）。院生に対しては、学会で発表するだけの研究ではなく、当事者の活動に学び、社会を変革するジャーナリズムの確立を、と厳しくそして優しく要求してきます。とても居心地が良いので、博士課程中退後の今もゆきさんの公開講座に通っています。

現在アドバイザーとして関わっている国連ウィメン日本協会は、国連の女性のための機関、UN Women(ジェンダー平等と女性のエンパワーメントのための国連機関)を支援する民間団体です。今年の活動の一つにクラウドファンディングを活用して、ヨルダンのザータリ難民キャンプで苦しむシリア女性を救済のための寄付を募り、UN Women に送金しました。来日した UN Women ヨルダン事務所長のジアド・シークさんから寄付に対するお礼が述べられ、その後、現在のヨルダンザータリ難民キャンプでの状況について、次のように報告がありました。「ザータリキャンプは、UN ウイメン日本協会のような民間からの支援を始め、日本政府を含む各国からの支援も頂き、成立しています。ヨルダンがシリア難民を受け入れて8年目になりますが、シリア難民総は130万人。人口当たりの難民数は世界で2番目の多さ。2012年からヨルダンにOASIS Centerを開設し、まず難民の心理的サポートを目的として活動してきましたが、今年度2018より2022年に向けて新たに打ち出された戦略の下、特に女性の「回復力」、「自立力」をつけるための支援プログラムに力を入れています。たとえばキャンプ内での仕事の機会提供(衣服の仕立て、キットの作成、WFPとのヘルシーキッチンなど)や低い金利で起業をサポートするマイクロ・ビジネス・システム、キャンプ外での就労許可支援、教育プログラム、女性の課題解決への意見交換場の設定など、様々なプログラムを通して女性の生活改善に取り組んでいます。」

「女性は数学が苦手」というステレオタイプを壊すことも女性の課題の一つと、私は考えています。そして数学を好きになる女子を多くしたいと思うようになりました。それが数学科出身の私のミッションだと気付いたのです。そこで、TeCuMの「教育における数学的な研鑽の場(=雰囲気と空間)の《質》の高密度化と《量》の拡大を段階的に目指す」という活動趣旨に惹かれて、賛助会員になりました。

今は、好きだった数学を語りたい、できれば「ガロア」を語れるようになりたいと考えています。「ガロア理論」に関心のある方、お仲間に入れてもらえませんか？

TECUMが自由に使えるオフィスをもてる可能性が高田さんの貢献で現実のものとなるかも知れません。そうしたら、週に一度、あるいは月に一度くらいのペースで「いまさら人には聞けない/高校生でも分かる 現代数学門教室」を開催しようかと夢想しています。

長岡

2 賛助会員のページ (2)

次に御登壇いただく迎久幸氏は、大学を卒業後、三菱電機に入社して、以来、人工衛星の開発一筋の道を歩んでいらした日本の先端技術の担い手のお一人ですが、東大生としては稀有な、エンジニアにしておくにはもったいない、上品で端正な目鼻立ちの方ですが、これ以上に氏に印象的なのは、氏の音楽にかける情熱です。ご本人は、以下のエッセイではあまりに軽くしか触れていらっしやらないので、少し補わせていただきます。

もともとお父様が、著明なレコード専門誌から取材を受けて記事になるほど立派な音響再生装置(私が若い頃は、音質の高度再生 High Fidelity を略して、HiFi と呼んだものです。)とレコードを収集していらっしや、氏はこのライブラリをさらに充実させていまは、数え切れない(uncountable!)ほどのレコード盤、CD 盤(HiRes Audio 盤も含め)をお持ちです。中年以上のクラシック愛好家の間では有名な渋谷の音楽喫茶室 Lion にあるような巨大スピーカやダイナミックレンジの広いアナログアンプはお父上からの遺産ですが、最近では、今後を見据えて、ご所蔵のアナログ音源を(高精細度 High Res Audio)に digital 化(AD converter)し、デジタルアンプ(高精細度の DA converter)このように変換した 2TB 以上ものデジタル音源を、iTunes を利用して、作曲家別、演奏家別、指揮者別などで検索できるようにデータベース化して、時間があるときはつねに、指揮者、演奏家、録音技術者の解釈の違いを堪能していらっしやる、という熱の入れ込みようです。氏が私に勧めてくださった書籍は、著明な「レコード評論家」たちの、侃侃諤諤の、しかし、私には議論の表層しか分からない、対談、鼎談、エッセイでした。

氏は、このように音楽を鑑賞したり、評論するだけでなく、ご自身も音楽を創作的に関わっておいでです。

大きな混声合唱団の一員として、特に年末は忙しい毎日を送っていらっしやいます。昨年は、そのような合唱の全国コンクールで優勝という栄誉も受けていらっしやいます。プロの音楽家と一緒に TV 画面に登場すること

も稀ではありません。氏がこの様な「趣味に走る」ことがなければ、日本の人工衛星技術は世界をはるかに凌駕するものになったはずであると確信します。

その様な氏が、いかにも、氏にしか書けない、深遠で高尚なエッセイを書いてくださりました。バッハとほぼ同時代（約半世紀前）の作曲家、オルガン演奏家でブクステフーデという着想のきらめきが圧倒的な魅力を持っている人がいるのですが、氏のエッセイは、幻想様式と呼ばれたブクステフーデの作曲を連想させます。

長岡

音楽のアナログによる真値と近似値の社会的共存性の考察

迎 久幸

皆様、はじめまして。賛助会員の迎久幸と申します。

私は現在三菱電機（株）で人工衛星開発に携わるエンジニアで、約40年前に駿台予備校で長岡先生の教えに導かれた縁により、昔の駿台生の「同窓会」が今でも毎年定期的開催されていて、異業種交流の場にもなっています。このたび先生より「音楽にまつわる話題など」とのお誘いを頂いたので、趣味で約40年続ける合唱に関連してお話ししてみます。

音楽にまつわる話題としては、TECUM Letter 創刊号において平尾先生の「物理屋が語る音階と色彩のいい加減な数学」の中に、平均律と純正律の係る下記記載があり、

#####以下引用#####

バッハによって人々の関心を集めた平均律では「ド」から次の「ド」までの1オクターブを12の音程に分割しています。基準となる音の周波数を f_0 とすると、 n 番目の周波数は $f_n = 2^{n/12} \times f_0$ と与えられます。これにもとづいてドレミの音階は C, D, E, F, G, A, B などと単純な記号で表されま
す。これはまた、音を発する管や弦の長さに関連づけることもできます。平均律の他に、単純な整数比から音程を決める純正律などありますが、いずれにしても音の高さが数値化されていてその順に配列されている点は共通しています。

#####

また TECUM Letter 創刊2号で長岡先生が「不思議に人気のある数 π 」を、また創刊号でも岸本様が π の話題をされていたことを受けて、音楽と π を橋渡しに、話題提供させていただきます。仰々しいタイトルはちびっこ歌マネ大合戦同様に恰好をつけてみただけで、洒落です。

さて「 π は約 3.14」と学校で教わることで、小学生でも円の面積が計算できることは、ある意味の驚異です。もちろん近似値で人工衛星を設計すると衛星を喪失しますが、社会生活上は近似値で十分通用します。本項では真数と近似値の差分として残る誤差に着目してみます。

合唱、合奏において、共鳴している状態を「ハーモニー：調和」+「動詞化：する」の造語で「ハモる」と言うのが習慣です。実に変な俗語です。

音楽を数学と関連付けるパラメータとして“周波数”があり、本来の音を“基本”とし、1オクターブは周波数比 2:1 の関係になります。また2以上の整数倍の周波数を持つ音の成分が“倍音”と呼ばれます。

基音と倍音に共鳴する音だけで音の集合体が構成された状態が「ハモる」状態といえます。倍音は言わば弦の共鳴の自然現象なので、基音との周波数比はアприオリに決まっており、第1倍音（基本と同じ：ユニゾン）、第2倍音（1オクターブ）、第3倍音（1オクターブと完全5度）…といった具合に高調波に至るまで基音との相対関係が決まります。

“純正律”と呼ばれる音律は、周波数の比が単純な整数比である純正音程のみを用いて規定されており、例えばドミソの周波数比は正確に 4:5:6 です。純正律で調律した楽器や純正律のルール通り厳密に演奏した合唱は淀みなく極めてピュアにハモります。タリススコラーズ、ヒリアード・アンサンブル、デビッド・マンロウなどの演奏を聞けば、その魅力は一聴瞭然です。

しかし、厳密な純正律で合唱をするには高度のテクニックを要するため、一般に見かけることはごく稀です。では巷で見かける「ハモる演奏」とは何か…

厳密には基音の整数倍以外の音素が含まれているのだけれども、マクロに聞こえる音は共鳴していて“聴いて気持ちいい状態”……これが通常体感する「ハモる」状態といえます。

なお整数倍以外が不協和音を形成する要素となります。

実は純正律には弱点があって、転調や移調して基音が移動するとその都度調律し直さないといけないため、オルガンなど調律作業が必要な楽器を用いて転調を伴う曲を純正律で演奏することは困難となります。

一方、“平均律”と呼ばれる上述の平尾先生も紹介されている音律は、1オクターブなどの音程を均等な周波数比で分割した音律です。1オクターブにはドレミファソラシド8音が含まれ、合計12の半音で構成されますが、この12の音程を均等な周波数比で分割するので、隣り合う音(半音)の周波数比は等しくなります。ピアノは通常平均律で調整するので、ピアノの奏でるドミソの和音が“平均律でハモる”状態です。

厳密に見れば純正律との音程差を内包するので、整数比だけでない成分が含まれていますが、我々一般人の耳には「聴いて心地よい美しい和音」と聞こえます。平均律では半音の周波数比を一定とした効果により、純正律の弱点であった転調、移調が都度調律し直すことなく可能となりました。ネグリジブルな誤差を許容することで、汎用化に成功したと言えます。

純正律は自然の摂理で決まるのに対して、平均律は人為的に設定したルールなのですが、調律されたピアノの奏でる和音に淀みを聴き取る人は特別な達人に限定されるということは、自然の摂理と人為的ルールの間内包する誤差が音楽的に障害にならなかったと言えます。

自然の摂理に敬意を表して、仮に純正律を真値、平均律に近似値と見做すならば、真値に対する近似値の誤差が人間の音楽的感受性を指標として、許容範囲内だったと言えます。平均律というルールそのものを近似解と見做すこともできると思います。

しかしこれは偶然なのかもしれません。

もしも人類のハモリに対する感受性が現状より洗練されていて、平均律に残される不協和音成分を耳障りと感じる人が多かったら、平均律は普及しなかったと想像しますし、バロック以降の人類の音楽史は全く異なる道をたどった可能性があると思うのです。

このケースでは、真値と近似値が社会的に共存できるか否かの指標が、人間の感受性に委ねられていたこととなります。この例で得られる教訓として、

- 近似値、近似解が社会に定着しうるかの指標とクライテリアが存在する
- 指標は客観的、定量的とは限らない
- 人類史に影響を及ぼすポテンシャルを持つ例もある

このアナログで π に着目した場合に、幻の「2002年の“ π は約3”の新ルール」は面白い思考実験テーマだと思います。直感的には「もし“ π は約3である”と学校教育を改訂したら、行政上の作業は簡略化されても、自然の摂理との間で不協和音を発生して“ハモらなかった”のではないか」と思うのですが、その評価指標と判定クライテリアは何だろうか？という疑問です。

近似値としての円周率は有効桁数を人為的にコントロールできるので、“ π は約3.14”が内包する真値との誤差は直感的には社会生活上許容範囲なのだと思います。

しかし、なぜ3.14が妥当な桁数であって、3ではだめなのか、より最適な桁数はないのかという疑問が残ります。工学的アプローチであれば、有効桁数は工学的な有意性で判断すればよいのですが、 π の場合は有効桁数の議論とも異なるので、そこから先は評価指標の議論が必要と感じた次第です。

下名不勉強のため2002年の議論の結末を存じ上げないので、もしかしたら π については既に結論は出ているのかもしれませんが、 π に限定せず一般化して考えるならば、

「真値と近似値の社会的共存性は評価指標に依存する」

ことを、純正律と平均律の関係が教えてくれると考えた次第です。

類似の事例として、創刊第3号にて平尾先生が「割り切れない世界とどう向き合っていくか」の論考を掲載されておりますが、地球の公転と自転による1日の長さという自然現象と、太陽暦という人為的なルールの間“うるう年”を導入することにより、真値と近似値の共存を実現していると見ることもできると考えます。

TECUMの目的のひとつとして「数理的な知性を尊敬する幅広い社会的ネットワークの存在の証明」とされているので、幅広いジャンルの方々が異種格闘技戦のように議論頂くテーマのひとつになればと願って、話題提供させて頂きました。どうぞよろしくお願ひ致します。

(補遺)円周率のその後、ですが、世論から批判を浴びた行政筋からは「それを強要したことは一度もない!歪曲された情報である。」という、確かにその通りと言える面もあるものの、権力側が発する言葉としてはいかにも負け犬の遠吠えの様なメッセージが聞こえてきますが、塾など受験業界では、「3.14の復活」を、台形の面積公式のそれと並べて、“ゆとり教育”の敗退として「歓迎」している様です。十進法ですと、3.141592... ですので、四捨五入の意味で区切りが良いのは、3, 3.14, 3.14159, ……となるのですが、二進数なら $\pi = 11.00100100001111110011111\cdots$ ですから近似値のための「零捨一入」の区切り方の選択の決断は幾分楽になりそうです。なお、円周率は円の周長と直径の比ですから、円周率を3で近似することは、円の周長をその円に内接する正六角形の周長で近似するという「乱暴狼藉」ではあります。

長岡

3 連載論考 「数学の世界」と「物理学の世界」 No.6

「哲学は、我々の眼前に広がっている宇宙という偉大な本に書かれている。ただしその本は、数学の単語と言語で書かれているので、その言葉が分からなければ、ひたすら無益に迷宮の中をさ迷い歩くだけである」とは“近代自然科学の父”といわれるガリレオ・ガリレイの、いかにも彼らしい挑発的な言葉¹です。

しかし、このガリレオの言葉が文字通りの意味で通用するためには、数学が、宇宙を含め自然現象を描写するために、ガリレオの時代より強力な道具になる必要がありました。

その代表が、三角関数です。戦後の「劇的な経済成長」の結果としてもたらされた高校進学率の向上の結果かも知れませんが、多くの高校生に、「学習する意味が分からない!」と評判の悪い主題の代表になってしまった三角関数ですが、その元になった三角比は、すでに古代エジプト社会の中で、巨大建造物の建築や天体観測において活躍する、極めて実用的な数学的技法でありました。三角関数は、上のような時代的な背景をもって、近代に入って、古代の生活に直結した実用的な技法から、自然現象を描写するための数学の必須ツールとして垢抜けて行ったものでした。

その意味で、今回の主題は、見掛けは難しそうに見えるかも知れませんが、技術的な難しさに負けずに、こういう歴史的な流れを意識して、読んでいただければ、と期待しています。

長岡

最も身近な三角関数の公式と物理

平尾 淳一

三角関数の和を積の形にする公式 三角関数には多くの公式がありますが、それらの中には具体的な物理現象と結びつけられるものがあります。和 → 積の公式

$$\cos A + \cos B = 2 \cos \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2} \quad (1)$$

を考えてみましょう。ここで $B = 0$ とすれば倍角の公式(半角の公式)

$$\cos A + 1 = 2 \cos^2 \left(\frac{A}{2} \right) \quad (2)$$

が導かれます。

¹これはわが国の学校教育では、「自然は数学の言葉で書かれている」としばしば誤って紹介されています。

物理学では三角関数を振動や波動を表すために使います．音のような波動による変位 $x(t)$ を表すために，時間 t と角周波数 ω_1, ω_2 を用いて $A = \omega_1 t, B = \omega_2 t$ とすれば

$$(x(t) =) \cos \omega_1 t + \cos \omega_2 t = 2 \cos \left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \cdot t \right) \cdot \cos \left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} \cdot t \right) \quad (3)$$

となって物理らしい顔つきになりました．ここで $\omega_1 = \omega_2$ としてみると，互いに等しい角周波数をもつ波の重ね合わせですから，式 (3) は振幅が 2 倍になることを表しているに過ぎません．

うなり ここで角周波数をわずかにずらしてみます．つまり $\omega_1 \neq \omega_2$ となるときを考えます．この条件のもとで描いたグラフが図 1 です．上から順に，式 (3) の左辺第 1 項 $\cos \omega_1 t$ ，左辺第 2 項 $\cos \omega_2 t$ ，そしてそれらの和が描かれています．上の 2 つをよく見ると中央付近の時刻 t_0 で両者の位相つまり山や谷が実現する時刻が互いに接近していることがわかります．したがってそれらを重ね合わせた結果，振幅が 2 倍になっています．実は ω_1 を ω_2 よりわずかに小さい値にしてグラフを描いているので，両者の位相は少しずつずれていき，時刻 t_B では，第 1 の波が谷であるのに第 2 の波は山になり，両者の和は 0 になっています．時刻 t_0 より過去の t_A においても同様です．

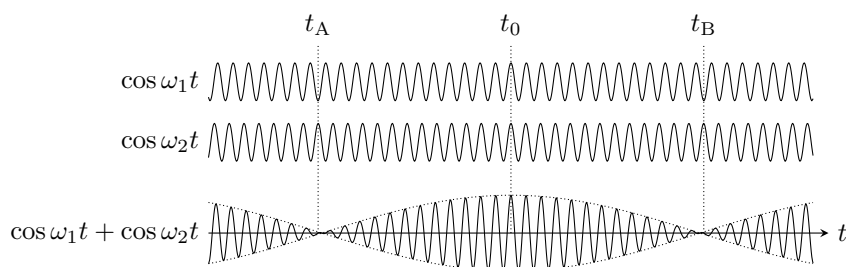


図 1: 三角関数重ね合わせのグラフ

このように角周波数がわずかに異なる波を同時に観測するとき振幅がゆっくりと変動する現象をうなりとよびます．式 (3) の右辺はこの現象の特徴をとらえるのに便利です．すなわち，重ね合わせの結果観測される振動の角周波数は右辺の最初の要素に現れる $(\omega_1 + \omega_2)/2$ であり，その振幅は時刻 t とともにゆっくり変動しますが，その様子は後半の要素に現れる $(\omega_1 - \omega_2)/2$ によって特徴づけられます．実際，図 1 の破線で描かれた 2 つの曲線は

$$x(t) = \pm 2 \cos \left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} \cdot t \right) \quad (4)$$

によって与えられます．この式より振幅変動の周期 $T = t_B - t_A$ は

$$T = \frac{\pi}{|\omega_1 - \omega_2|/2} = \frac{2\pi}{|\omega_1 - \omega_2|}$$

となりますが，これは 2 つの波の位相差が 2π に達するまでの時間に一致しています．

さて，ここまでは教科書にも書いてある話でした．本稿のテーマはここからです．

物理の教師は図 1 の破線で描かれた曲線あるいは式 (4) から

うなりの周期は $2\pi/|\omega_1 - \omega_2|$ である

と説明し，説明を受ける学生の皆さんもそれで納得しているようにみえます．しかし，実際に存在しているのは実線の曲線であって，破線の曲線（包絡線）は現実に存在しているわけではありません．それにも関わらず誰もが上の説明で納得するのは，聴覚が音の高さ（この場合，角周波数 $(\omega_1 + \omega_2)/2$ に対応します）とともにその強度の変化（破線の曲線）を認識しているからであると考えられます．

強度の変化は数学的には，平均のパワー $P(t)$

$$P(t) = \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} x(t)^2 dt \quad (5)$$

を意味します．ここで平均時間 Δt は

$$\frac{2\pi}{\omega_1 + \omega_2} \ll \Delta t \ll \frac{2\pi}{|\omega_1 - \omega_2|}$$

とします．この定義に式 (3) を代入し，式 (2) を用いると

$$P(t) = 4 \cos^2 \left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} \cdot t \right)$$

となります (図 2) ．

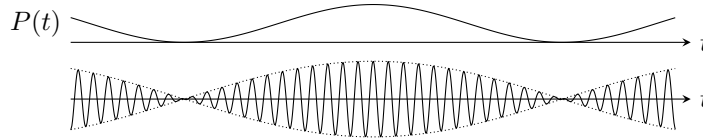


図 2: うなりの振幅とパワー

うなりを生み出す波の重ね合わせは単なる足し算に過ぎません．数学的には線形な処理ですが，それを認識する聴覚は非線形な素子です．

電子回路におけるうなり 電気通信などにおいて，電波や変動する電気信号を扱う電子回路ではヘテロダインという方法がよく使われています．これは 2 つの信号の周波数の差に等しい周波数の信号を取り出すというもので，周波数混合によってビート (うなり) をとるなどということもあります．

式 (3) において，

$$\Omega_c = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}, \quad \Omega_s = \frac{\omega_1 - \omega_2}{2}$$

とすると

$$x_r(t) = 2 \cos \Omega_s t \cdot \cos \Omega_c t = \cos(\Omega_c + \Omega_s)t + \cos(\Omega_c - \Omega_s)t$$

となります (積 \rightarrow 和の公式) ．この式は電気通信において，角周波数 Ω_c の搬送波 (Carrier) に角周波数 Ω_s の信号 (Signal) を乗せる振幅変調 (AM, Amplitude Modulation) を表しています．音声通信の場合 Ω_c, Ω_s はそれぞれ電波，音声の角周波数を表します．現実の通信においては

$$x_r(t) = (1 + m \cos \Omega_s t) \cos \Omega_c t, \quad 0 < m < 1 \tag{6}$$

とします．以下この式にしたがって話を進めましょう．

式 (6) で表される電波の受信機の目的はそこから音声信号を取り出すことです．人間の聴覚と同じように式 (5) にしたがって処理する方法もあります．これを 2 乗検波とよびます．ヘテロダイン受信機では

$$x_s(t) = \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} x_r(t) \cos \Omega_c t dt = m \cos \Omega_s t$$

にしたがって音声信号を取り出します²．これは，電波信号 $x_r(t)$ に含まれる周波数 $\Omega_c + \Omega_s$ と局部発振信号の周波数 Ω_c の差の周波数すなわちうなり (ビート) を取り出しているということもできます．

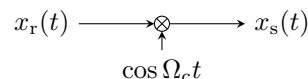


図 3: ヘテロダイン受信機

このように，聴覚においてはあまり意識していなかった包絡線の取得が電子回路において明確になります．数学的には掛け算の処理が必要だということになります (図 3) ．

² 2 乗検波では m に比例する項だけを取り出します．

人間の聴覚 人間の聴覚においてこのような処理はどこでどのようにおこなわれているのでしょうか？これに完全に答えることはできませんが、関連してひとつ簡単な実験を提案しておきましょう。PC上で音声を合成するソフトウェアは容易に入手することができます³。また、連載「スクリプトが拓く世界」で取り上げてくださるかもしれません。いずれにしてもご自身で実験してみてください。

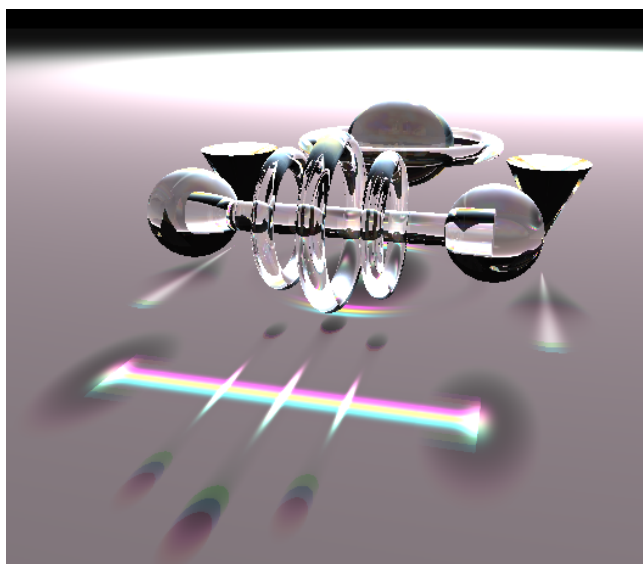
PC上でたとえば 199.5 Hz と 200.5 Hz の信号を合成すれば、平均周波数 200 Hz、強弱の周波数 1 Hz のうなりが聞こえるはずですが、それではそれぞれの信号を別々に記録してステレオの L チャンネルと R チャンネルに割り当ててヘッドフォンで聴いてみるとどうなるでしょうか？物理的には左耳で 199.5 Hz、右耳で 200.5 Hz の音を聴いていることになっているのですが、果たして結果はいかに？

4 連載: スクリプトの開く世界 No.6

前回は、数学記号のような 2 次元的な広がりをもつ図形的な情報を含む文書を、専門の印刷業者さんが作るような高品質の美しい体裁で作成するためのスクリプトとして $\text{T}_\text{E}\text{X}$ あるいは $\text{L}\text{A}\text{T}_\text{E}\text{X}$ と呼ばれるものを紹介しました。

数学記号のような特殊な表現を含まない普通の文書を（ある最小限の約束を守って）text file として作ったら、それを自動的に $\text{T}_\text{E}\text{X}$ スクリプトに自動的に変換する、スクリプトを AWK [オーク] や Perl [パール] などという text file 処理言語で書くことも簡単です。このような言語は、上で高田さんがお使いになっていた PL/1 あるいはそれと同じ時代の事務的なデータ処理で一世を風靡した COBOL のような古典的言語とは、比較するのもおかしなことですが、習得が遥かに簡単な（つまり、私達の使う日常言語に近い）言語です。私達が使える安価なコンピュータの高性能化の進展の益々の展開を考えると、スクリプトを敬遠しないことの重要性はますます増大しているはずですが、世間では、GUI(Graphical User Interface)をはじめとして、スクリプトやプログラミングを時代後れと弾劾して「(情報)弱者」の味方の振りをする人が少なくないのは残念です。

今回は、ちょっと趣向を変えて、印象派の巨匠モネを気取る気分で、光の作る翳と影を数学的に実現する言語である POV-Ray を紹介しましょう。この少し聞きなれない名称は、Persistence of Vision Raytracer(視覚光線を厳密に追跡するもの)に由来するようです。私がおの昔、放送大学の教員時代に、「情報システム科学」という科目のために少し書き足した簡単なスクリプトの一部ですが、ガラスのようなもので出来た透明な球 (sphere)、円柱 (cylinder) や円錐 (cone)、円環 (torus) といった立体に三つの光源から来る光の透過・屈折で作られる次のような絵画を、数学的 = 理論的に実現したものです。ただしこの画像では、光の透過・屈折の難しさをいとも簡単に処理する POV-Ray の威力を強調するため、芸術性は犠牲にしています。



この絵を書くためのスクリプトの本体部分は以下のようなスクリプトです。カメラ (視点と同じ)、光源 1、光源 2、光源 3、円環と球の結合 (パーベル型)、球と円環の結合 (土星型)、円錐などがスクリプトで描写されていることが何とか気分的に理解していただけば十分です。

³ Audacity というフリーウェアが有名です。

```

camera {
  angle 90
  location <3.50, -15.00, 3.00>
  direction <0.0, 0.0, 1.6542>
  sky <0.0, 0.0, 1.0>
  up <0.0, 0.0, 1.0>
  right <1.3333, 0.0, 0.0>
  look_at <0.000, 0.000, -2.7500>
}
light_source { // Light1
  <-0.2, 100, 65>
  color Cyan * Intensity
  fade_distance L_Fade_Distance
  fade_power L_Fade_Power
}
light_source { // Light2
  <0, 95, 65>
  color Yellow * Intensity
  fade_distance L_Fade_Distance
  fade_power L_Fade_Power
}
light_source { // Light3
  <0.2, 90, 65>
  color Magenta * Intensity
  jitter
  fade_distance L_Fade_Distance
  fade_power L_Fade_Power
}
union {
  cylinder { <-3,0,0>, <3,0,0>, 0.3 }
  torus {
    1.5,2.5
    rotate z*90
  }
  torus {1.2,0.2
    rotate z*90
    translate<1,0,0>
  }
  torus {1.2,0.2
    rotate z*90
    translate<-1,0,0>
  }
  sphere{<0,3,0>,.9
    rotate z*90
  }
  sphere{<0,-3,0>,0.9
    rotate z*90
  }
}

```

```

    }
    texture {Texture01}
    interior {Interior01}
translate <0.0, -4.0, -0.5>
}
union{
    sphere { <0,0,0>,1.0
    texture {Texture01}
    interior {Interior01}
    }
    torus {1.7,0.2
    texture {Texture01}
    interior {Interior01}
    rotate x*90
    }
scale <1.5,1.2,1.2>
translate <0,2,0>
}
cone { 0, 1 , -2*z, 0
    texture {Texture01}
    interior {Interior01}
    translate <-4.0, 0.3, 0>
}
cone { 0, 1, -2*z, 0
    texture {Texture01}
    interior {Interior01}
    translate <4.0, 0.3, 0>
}
plane { z, -2.5
    hollow on
    pigment { Gray60 }
}
}

```

全体をパッと見ると複雑そうですが、一つ一つは実に単純なスクリプトで実現されていることを理解していただければ十分です。(技術的繁雑さに眼を奪われなくて欲しいので、上では省略していますが、上のような簡略命令を実現するための前提となるファイル — header file — の読み込みなどが幾つかが省略されています。)

次のような芸術性のレベルにまで高められた作品もあります。以下は、2004年のコンペティション POVCOMP で優勝した Norbert Kern 氏 (nobert-werner-kern@t-online.de) の作品です。この作品には POV-Ray だけでなく、Plantstudio と Photoshop が使われているそうですが、右上の天井から差し込む光の効果を実現する上で POV-Ray が活躍したようです。

数学と自然科学、数学と技術との深い関連は、今日多くの人の知るところですが、数学と芸術の間にも深遠な関連が潜んでいることに、特に、数学教育の指導者はもう少し敏感であるべきではないでしょうか。



それにしても茶室に代表されるような、日本の伝統的なわび、さびの文化に対する西欧の人の深い尊敬と憧憬（実際、この作品の作者は、アジアの精神をその spirituality = 霊性 に感ずると述べています。）に私達はもっともっと大きな誇りと重大な責任を感じなければならないと思います。

POV-Ray についての詳しい情報は、Web site

<http://www.povray.org><http://www.povray.org>

を御参照下さい。

POV-Ray は、標準では Windows 上での機能しますが、Unix/Linux でも動きます。私に場合は Linux です。program の AGPL3 という free software のライセンスで source code が公開されているので、基本的にはどのような platform にも移植できるはずです。