X Series, FM Domain Standard Segment
FM series Unit 000 〜 009 場合の数: 可能性の完全枚挙

事故や不祥事が起こる度にいわれる言葉に「原因究明」「再発防止」があるが、こういったかけ声が繰り返されるのは、従来究明さされて来なかった要因が存在し、それが「徹底究明」されれば、今後の「再発」が「防止」できるはずであるという考えがあるからだろう。原因が有限個に絞られていればそのすべてを枚挙することができれば「徹底究明」どころか《完全究明》が実現されるはずであるがそれがかけ声ほど簡単でないことは、繰り返し続く残念な事故や不祥事で実際上証明されている。本章では、完全究明のために必須の人間がとるべき態度についての数学的な原理に迫ろう。

【発展的総合研究課題 1】あなたは、原因の徹底究明、再発防止は可能だと思いますか。もし可能だと思うなら、そのためにまずやるべきこと、あるいは従来のようにやってはいけないことを上げてみましょう。
もし不可能だと思うなら、その証明に肉薄する論理的に厳密な議論を構成しててみましょう。いずれも、数学の役割について考えてみましょう。

1　場合の数という概念への素朴なアプローチ

ものの集まりという考え方は、集合という数学的な概念の源流となったものであり、現代では、小学生ですら自分は知っていると思っている単純なものである。

最近は、小学生どころか、りんごの個数や鉛筆の本数を、数を使って数えることは、「教育熱心」な家庭では、小学校に入る前から教えている。小学校に入る前の幼児ですら、自分の年齢を指で示すような手法を身につけていることは、これが人間には必ずしも難しいことでないことを示している。しかし、ちょっとでも考えてみると、年齢とは、誕生してからの時間 T 時間を 24 時間で割ったときの整数部分である生存日数 D 日を約 365.2425 日を年単位として切捨てで計ることであるから、それ自身が難しいものであるが、それを親指から小指までの明らかに外見の違う各指のもつ個性を無視してそれをまるで鉛筆のように対応させることはもっと難しいことである。

本当は良く見てみれば、表面の傷など顕微鏡で観察すれば、すべての鉛筆にも区別がつくはずであるから、鉛筆を数えることですら難しいはずである。

不思議なことに、人間は、このようなことを疑問にもたずに、数学的な抽象化を幼児の段階からする特殊な能力に恵まれている。

そこで、我々はまず、このような幼児でも分かるような素朴な方法で問題に接近してみ

1.1　場合の数の素朴な意味

例えば、入学試験において、一人の受験生が、必須科目の国語、数学の他に、外国語から英語、フランス語、ドイツ語、中国語から１科目、理科から物理、化学、生物、地学から２科目、社会科から、世界史、日本史、地理、倫理社会から２科目を選択するとすれば、各々の受験生にとって、選択課目の多様性は何雄通りあるだろうか、それぞれの選択によって受験生の受験場所の建物を用意するとすれば、何通りの建物を用意しなければならないだろうか、といった簡単な問題から、試験実施担当者からは、選択課目によって実施管理責任者、採点者、合否判定基礎資料作製者（それぞれの科目の採点者の配置と公平性の担保のための施策、選択科目によって平均点にバラツキがあるとしたとき、得点調整に必要な作業責任者）の会議は何人日になるか、予期せぬ問題が発生したとき広報までに必要な作業の手順は問題の種類（自明な出題ミスや不適切な出題という問題からやむを得ない事情で遅刻／欠席した受験生対策まで）と会議メンバーと責任者といったかなり面倒な問題まで、入試要項を発表する前に事前に考えておくことはミスのない入試を実施する上で重要である。

後者のような複雑な問題を処理できるためには、最初に示した、場合の数 number of cases と呼ばれる、論理的にあり得るすべての可能性を列挙して数え上げる、という簡単な問題を解決できる能力が前提として必要である。

複雑な場合の数問題も、正しく解決するための基礎的な数学的原理を理解すれば、基本的には自然数の四則しか使わない世界で、所詮は有限個の可能性を数え上げるだけなので、小学生でもできるという意味で、抽象的な理論的難しさがある分けではないが、うっかりすると誤謬をおかしてしまう。いかなる場合も漏らさず、しかも重複することなく、数え上げるために数学的手法を体系立てて理解することが有益である。

ここでは、そのような数学的な手法の基礎を学ぼう。

1.2　区別と同一視

場合の数を考える上で、大切なのは、区別（＝差異の認識）と同一視（＝差異の抽象化）である。

上の受験科目の選択方法に関しては、外国語、理科、社会科それぞれの中の選択はすべてが水平的に考えられているが、外国語で、フランス語選択者は、フランス大革命を挟む西欧近代史の常識が、他言語選択者より多い可能性があるので、社会科では、世界史を除く他の３教科から選択すべきであるといった議論はよくある。似た話題に、理科で地学を選択した学生は、地理で有利である可能性があ

るから、社会科の選択では地理が選択できないようにすべきだ、というのもある。反対に、それぞれは組にして必ず選択肢の中にいれるべきであるという主張もある。これらは、社会科、理科という教科をまとめる分野の属性を一部捨象して、それぞれの分野の中の特定の科目の個性に注目するという姿勢である。

さらに反対に進んで、理科と社会科は全部で８教科の中から任意に４科目を選択するようにすべきであるという主張もそれなりの言い分があるだろう。この場合、物理、化学、生物、地学、世界史、日本史、地理、倫理社会は理科、社会科という分野の区別を無視して、水平的で公平な選択科目の構成要素と見なされるべきであるという立場である。

問題 1 このように、分野別の選択方式と分野横断的な選択方式では、どちらの方がどれくらい選択肢が多くなると思いますか。数学を知らないとして予想して御覧なさい。

このように、場合の数を考えるとき、個性的な区別があると考える場合（典型的には世界史は他の社会科科目と違う）と、そのような個性を無視する場合（典型的には、理科、社会科の８科目は選択科目としては分野別の区別をしない）がある。

本来は、すべての個体には、必ず何らかの個性があるはずであるが、そのような微細な違いを抽象して敢えて同一視することも文脈によっては意味をもつ。

【課題研究 1】 リンゴといっても、品種による違い、栽培果樹園の違い、色のつき具合の違い、大きさの違いなどに注目すると、すべての果実が異なるというべきである。しかし、人間がリンゴというときには、そのような差異を全部無視している。しかし、何をもって、ミカンと区別しているのだろう。

1.3 場合の数への接近の基礎

以下では、場合の数を考える際に役に立つ数学的な基本事項を述べよう。ここを理解するには「有限集合についての要素の個数」に関する知識があることが望ましい。

1.3.1 素朴集合論の復習 — 有限集合の要素の個数

有限集合の要素の個数

【定義】集合 A が、n 個の要素からなることを

$$\#(A) = n$$

と表す。

Notes

1° 集合というのは各要素のもつ多様な個性を無視して、単なる個数を数える対象として分離された個体の集りを考えるという思想に基づく数学的な概念であり、突き詰めると難しい問題を孕む。しかし、我々は、そのような根源的な追求は諦めて、常識という健全な世界で、話を進める。本章の発展的な内容ですら理解に必要となるのは、写像を踏む要素の個数を数える基礎となる素朴集合論の諸概念である。これは、素朴という形容がつくとはいえ、大学以上の高等な現代数学を研究する一般的な数学研究者がふつうに考えている際の数学的立ち場であるから不安になる必要はない。の中でももっとも基本的な部分なものばかりである。

2° 上の定義から、記号 $\#(A)$ は有限集合の要素の個数を表す。

3° A が空集合であるとは $\#(A) = 0$ となることである。

4° 正の整数 n に対して

$$\#(A) = n$$

であるとは 集合 A と集合 $\{1, 3, 3, \cdots, n-1, n\}$ との間に 1 対 1 対応（全単射）が存在することである。厳密な定式化はともかく、事実あるいは生活の知恵としては、幼児でも知っていることである。

問題 2 $A = \{\emptyset\}, B = \{\emptyset, \emptyset\}$ の要素の個数を求めよ。

5° ここでは、関係ないが、素朴集合論を勉強した人なら、A が無限合の場合は $\#(A)$ は A の濃度 density を表現する記号になることを知っていよう。しかし、$\#(A) = \infty$ とはいわないことは素朴集合論を知らない人も知っておきたい。

和集合、共通部分の要素の個数

【定理】A, B がある集合 X の有限部分集合であるとき、それぞれ、それらの和集合 union 、共通部分 intersection と呼ばれる集合 $A \cup B,\ A \cap B$ も X の有限部分集合であり、次の等式が成り立つ。

$$\#(A \cup B) = \#(A) + \#(B) - \#(A \cap B)$$

特に、A, B が互いに素（すなわち $A \cap B = \emptyset$ ）であるときは、

$$\#(A \cup B) = \#(A) + \#(B)$$

である。

Notes

1° $A \cap B = \emptyset$ の場合が、一般の場合の特殊形として語られているが、$A \cap B = \emptyset$ のときに

$$\#(A \cup B) = \#(A) + \#(B)$$

であることを用いて、一般の場合を、互いの素な部分集合への分解 $A \cup B = A \cup (B \backslash A)$ と $B = (B \cap A) \cup (B \backslash A)$ とから導かれる等式

$$\#(A \cup B) = \#(A) + \#(B \backslash A)$$

と

$$\#(B) = \#(A \cap B) + \#(B \backslash A)$$

から、$\#(B \backslash A)$ を消去することで導くことができる、という意味では、互いに素な場合が基礎であるということができる。

> ここで集合 X の部分集合 A, B に対して $B \backslash A$ とは $\{x \in X | x \in B$ かつ $x \notin A\}$ あるいは $\overline{A} \cap B$ で表現される集合を意味する。

これが次の述べる和の法則の原理である。