

「統合的・発展的」？ いや、「ご都合主義的」？

2022年11月13日

特定非営利活動法人 TECUM 副理事長

松並 奏史

今回の企画は、前回の「三角関数」に続いて「指数関数・対数関数」。内容に関する深い議論は本論にお任せすることにして、この巻頭言では「指数の拡張」の背景にある「考え方」に着目してみます。

まず、指数を正の整数から一般の整数に拡張する際に、教科書で採用されている方法を見てみましょう。指数 n が正の整数の場合、指数法則により

$$a^n \cdot a = a^{n+1}$$

が成り立つことから、両辺を a で割り

$$a^n = a^{n+1} \cdot \frac{1}{a}$$

を導きます。これをいわば「降順」の漸化式、つまり $n+1$ の場合から n の場合を定めるものとみることにより、 n が正の整数の場合をもとに、 n が 0 や負の整数の場合にまで指数の範囲を拡張する、というストーリーです。

言い換えれば、ある限定された領域で定義された「指数」というものについて、それが満たす「指数法則」という性質に基づいて、定義される領域が広げられる、ということになります。

このような場面は、例えば「三角比」にもあります。鋭角についての三角比が満たす性質、例えば座標平面上での斜辺の長さを半径とする円との関係¹に基づいて鈍角の三角比を定義する、という展開です。そしてさらに、直角三角形を用いた鋭角の場合の定義自体、鈍角（と $0^\circ, 90^\circ, 180^\circ$ ）とセットにされた 0° 以上 180° 以下の三角比の定義として、その円を用いた定義により「更新」することができます。

新しい学習指導要領では、この「ある性質に基づいて概念の定義を拡張しようとする」過程が「発展的な考察」、そして「拡張前に満たしていた性質を、拡張後の概念もまた満たすかどうかを考える」過程が「統合的な考察」と術語化され、「統合的・発展的に考えること」とセットにされて標語的に重要視されています²。

他にも、2直線が平行であることの定義を例に挙げてみます。そもそも初等幾何学的に何をこの定義とするか、それ自体に議論のあることだと思いますが、ここでは仮に「2直線が決して交わらないこと」を最初の定義とします³。これが、解析幾何学になると「傾

¹あるいは前回山本優希氏が発表されていたように、正弦定理・余弦定理でもよいでしょう。

²平成30年告示の高等学校数学の学習指導要領解説 p.24 を正確に引用すると「発展的に考えるとは、数学を既成のもののみなしたり、固定的で確定的なもののみなしたりせず、新たな概念、原理や法則などを創造しようとすることである。」「既習のものと新しく生み出したものとを包括的に取り扱えるように意味を規定したり、処理の仕方をまとめたりすることが統合的に考えることになる。」ということになるそうです。その例としてまさに上でみた指数の拡張の過程が取り上げられています。

³ちなみに、小学校の算数では「一つの直線に垂直な二つの直線があるとき、この二つの直線は平行である」という「約束」するそうです。「2直線が決して交わらないこと」を、実際に操作で確かめられないのが理由のようです（平成29年告示の算数の学習指導要領解説 p.202 より）。

きが等しいこと」が平行条件として説明され、ここで、實際上2直線の平行の定義の拡張がなされます。というのも「2直線が一致すること」、すなわち「2直線が無数に交点をもつこと」をも2直線が平行であることに含まれることになるからです。そしてさらに、座標平面上で平行の場合を除き「異なる2直線は1点で交わる」のであるから、いっそ平行な異なる2直線も1点で交わるように、座標平面に「無限遠直線」というものを加えて平面自体を拡張する、という発想もあります。この拡張された平面においては、實際上「2直線が平行」であることを特別な性質として扱う必要がなくなります。「2直線が平行」という特別な場合を解消しようというモチベーションに基づき、今度はそれが置かれた「平面」の定義の拡張がなされているともいえます。

また、これら「拡張時に用いた性質により定義の更新をする」のに似た発想として、「他の領域でも使える形で定義を更新する」こともあります。例えば、「2整数 a, b が互いに素である」ことは通常「2整数 a, b の最大公約数が1である」ことと定義されますが、これをその必要十分条件である「 $sa + tb = 1$ となる整数 s, t が存在する」ことにより定義することを考えます。後者の定義は「整数全体は2整数 a, b により生成される」、すなわち「任意の整数 n について $sa + tb = n$ となる整数 s, t が存在する」と言い換えることもでき、これは、加法と乗法で閉じているような集合でさえあれば、たとえ最大公約数が一般に存在しないような集合でも論ずることのできる性質です。つまり、この更新された定義により、「2つの要素 a, b が互いに素である」とは、整数に限らず一般の集合において「 a, b によりその集合の全ての要素が生成される」ことを表すものと考えられるようになります。ベクトルの内積を成分で定義するという立場も、これと同種の発想がもとにあるといえます。

このようなダイナミックな過程を学校数学でも重要視していこう、という姿勢は、その実現可能性を無視すれば、私は良いことだと考えています。が同時に、ときに「ご都合主義的」なこうした考察を高等学校の授業に取り入れる際には、いわば「現代数学原理主義」にならないような慎重さ、そして批判精神もまた、決して忘れてはならないことだとも感じます。

目次

「統合的・発展的」？ いや, 「ご都合主義的」？ (松並 奏史)	1
第 I 部 《特別企画》 指数関数・対数関数について考える 論稿集	5
なんのための指数・対数関数教育？ (長岡 亮介)	7
対数微分法の落とし穴 (江森 勇希)	37
指数関数と物理学 (平尾 淳一)	41
数学書を読む, 「セルフトレーニング」 (永井 礼正)	49
中心極限定理の手前まで (猪奥 倫左)	53
第 II 部 《特別企画》 若手教員・教員志望学生が答える！ 指数関数・対数関数 質問箱	59
第 III 部 Q and A	75